Vjerojatnost

Zadaci za vježbu

Prirodoslovno matematički fakultet – Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

E-mail adresa: adrian.beker@math.hr, ivana.valentic@math.hr

Sadržaj

Poglavlje 1.	Vjerojatnost	iv
Poglavlje 2.	Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost	vii
Poglavlje 3.	Diskretne slučajne varijable	x
Poglavlje 4.	Diskretni slučajni vektori	xiii
Poglavlje 5.	Neprekidne slučajne varijable	xvi
Poglavlje 6.	Funkcije izvodnice	xix
Poglavlje 7.	Nejednakosti i granični teoremi	xxi

POGLAVLJE 1

Vjerojatnost

ZADATAK 1.1. Slučajni pokus sastoji se od bacanja dvije igraće kocke. Odredite prostor elementarnih događaja Ω. Ako je

$$E = \{\text{zbroj brojeva na kockama je neparan}\},$$
$$F = \{\text{barem jedna kocka je pala na } 1\},$$
$$G = \{\text{zbroj brojeva na kockama je } 5\},$$

prikažite pomoću elementarnih događaja sljedeće događaje:

$$F,\ G,\ E \cap F,\ F \cap G \text{ i } E \cap F \cap G.$$

ZADATAK 1.2. Slučajni pokus sastoji se od bacanja simetričnog novčića sve dok ne padne pismo. Odredite prostor elementarnih događaja Ω i pomoću njih prikažite sljedeće događaje:

(i) $A = \{\text{novčić je bačen neparno mnogo puta}\}$,
(ii) $B = \{\text{glava je pala barem pet puta zaredom}\}$.

ZADATAK 1.3. Neka su A, B i C događaji vezani uz neki slučajni pokus. Prikažite pomoću A, B i C sljedeće događaje:

(i) dogodio se barem jedan gornji događaj,
(ii) dogodio se točno jedan gornji događaj,
(iii) dogodila su se točno dva gornja događaja,
(iv) nisu se dogodila više od dva gornja događaja.

ZADATAK 1.4. Neka je $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Odredite koje od sljedećih familija podskupova skupa Ω su σ-algebre na Ω, a one koje nisu nadopunite do najmanje σ-algebre koja sadrži elemente te familije.

(i) $\mathcal{F}_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}$,
(ii) $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$.

ZADATAK 1.5. Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω i $B \subseteq \Omega$. Jesu li tada

(i)
$$\mathcal{G} = \{C \subseteq B : C \in \mathcal{F}\}$$

(ii)
$$\mathcal{H} = \{C \subseteq B : \text{ postoji } A \in \mathcal{F} \text{ takav da je } C = A \cap B\}$$

σ-algebre na B?

ZADATAK 1.6. Ako su A i B događaji, dokažite da vrijedi $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leqslant \mathbb{P}(A \triangle B)$.

ZADATAK 1.7. Neka su A i B događaji takvi da je $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ i $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$. Pokažite da je $\frac{1}{12} \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \frac{1}{3}$ i navedite primjere koji pokazuju da su oba rubna slučaja moguća. Koje ograde vrijede za $\mathbb{P}(A \cup B)$?

ZADATAK 1.8. Simetrični novčić baca se 4 puta. Izračunajte vjerojatnost da

(i) padnu barem tri pisma,
(ii) padnu točno tri pisma,
(iii) padnu barem tri pisma zaredom,
(iv) padnu točno tri pisma zaredom.

ZADATAK 1.9. Bacamo n simetričnih kocaka. Izračunajte vjerojatnost da produkt dobivenih brojeva

(i) bude djeljiv s 5,
(ii) ima zadnju znamenku 5,
(iii) ima zadnju znamenku 0.

ZADATAK 1.10 (Problem of points). Dva igrača A i B igraju niz igara dok netko ne skupi 6 pobjeda. Igre su nezavisne, a u svakoj igri obojica imaju jednaku vjerojatnost pobjede. Nakon 8 igara, igrač A ima 5, a igrač B 3 pobjede. Zanima nas vjerojatnost da će igrač B ipak pobijediti.

Objasnite zašto sljedeće rješenje nije točno: Svi mogući ishodi su $\Omega = \{A_1, B_1A_2, B_1B_2A_3, B_1B_2B_3\}$ pri čemu npr. A_2 predstavlja da je prvi igrač pobijedio u 2. sljedećoj igri (tj. 10. ukupno). Dakle, $\mathbb{P}(\{\text{B prvi do pobjede}\}) = \frac{|\{B_1B_2B_3\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$.

ZADATAK 1.11. Da bi počeli igrati s čovječuljkom u igri *Čovječe ne ljuti se* morate prvo dobiti šesticu na kocki.

(i) Izračunajte vjerojatnost da u trećem pokušaju prvi puta dobijete šesticu.
(ii) Izračunajte vjerojatnost da vam treba više od tri pokušaja da prvi puta dobijete šesticu.
(iii) Nakon koliko bacanja bi vjerojatnost da ste dobili šesticu bila barem 0.95?

ZADATAK 1.12. Iz skupa $\{1, \ldots, 100\}$ nasumce su odabrana dva ne nužno različita broja, m i n. Izračunajte vjerojatnost da je

(i) $m^n + n^m$ neparan broj,
(ii) $m^n \cdot n^m$ paran broj.

ZADATAK 1.13. Za Okrugli stol sjeda n vitezova, pri čemu Arthur ne želi sjediti kraj Mordreda ni kraj Lancelota. Ako sjedaju na slučajan način, kolika je vjerojatnost da Arthur ne sjedi ni kraj Mordreda ni kraj Lancelota?

Zadatak 1.14. Pokažite da za događaje A, B, C vrijedi

$$\mathbb{P}(A^c \cap (B \cup C)) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Koliko ima prirodnih brojeva među $1, \ldots, 500$ koji nisu djeljivi sa 7, ali su djeljivi s 3 ili 5?

Zadatak 1.15. Jednog radnog tjedna u nekom gradu 10 ljudi je pozvalo električara u svoje kuće radi popravka nekih električnih uređaja. Svaki čovjek je slučajno odabrao neki radni dan u tom tjednu i pozvao električara. Izračunajte vjerojatnost da postoji barem jedan radni dan u kojem nitko nije pozvao električara.

Zadatak 1.16. Teniski turnir igraju $m = 2^n$ igrača (dakle, ukupno n runda, pri čemu je zadnja runda finale), te pretpostavimo da u svakom meču, svaki od igrača ima jednaku vjerojatnost da pobijedi. Ako slučajno odaberemo dva igrača, odredite vjerojatnost da se susretnu

(i) u prvoj rundi;
(ii) u finalu;
(iii) u nekom trenutku.

Zadatak 1.17. Marija baci dva novčića, a Ivan jedan.

(i) Koja je vjerojatnost da Mariji padne više glava nego Ivanu?
(ii) Koji je odgovor na to pitanje ako Marija baci tri novčića, a Ivan dva?
(iii) Što mislite kolika je ta vjerojatnost ako Marija baci $n + 1$ novčić, a Ivan njih n?
(iv) Možete li to dokazati promatranjem svih mogućnosti nakon što je Ivan bacio sve svoje novčiće, a Mariji je preostalo još jedno bacanje?

Zadatak 1.18. (i) Pokažite tzv. Bonferronijevu nejednakost

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

(ii) Svaku od m kuglica smo slučajno rasporedili u bilo koju od n kutija ($m \geqslant n$). Koristeći subaditivnost vjerojatnost te gornju nejednakost, ograničite s obje strane vjerojatnost događaja $E = \{$barem jedna kutija je ostala prazna$\}$. Intuitivno, zašto je ova aproksimacija bolja kada je $m \gg n$?

Zadatak 1.19. Neka je $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz događaja takvih da je $\mathbb{P}(A_n) = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da je $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.

Zadatak 1.20. Poznato je da se gotovo sigurno događa barem jedan od događaja $A_1, \ldots, A_n$ te da se gotovo sigurno ne događa tri ili više tih događaja. Ako je $\mathbb{P}(A_i) = p$ za sve i te $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = q$ za sve $i \neq j$, pokažite da je $p \geqslant \frac{1}{n}$ te $q \leqslant \frac{2}{n}$.

POGLAVLJE 2

Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost

Zadatak 2.1. Špil sadrži n karata označenih prirodnim brojevima od 1 do n. Karte se izvlače slučajnim redoslijedom, jedna po jedna. Ako znamo da je za neki k broj na k-toj izvučenoj karti najveći dotad izvučeni broj, koja je vjerojatnost da je on n?

Zadatak 2.2. Bacamo 5 simetričnih novčića. Nakon prvog bacanja bacamo ponovno one novčiće koji su u prvom bacanju pokazali glavu. Kolika je vjerojatnost da će nakon drugog bacanja ukupno (u oba bacanja) pasti barem 3 pisma?

Zadatak 2.3. Tri novčića C_1, C_2 i C_3 leže na stolu. Vjerojatnosti da na njima padne pismo su redom $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ i 1. Na slučajan način uzmemo jedan novčić, bacimo ga i uočimo da je palo pismo. Odredite vjerojatnosti da smo uzeli novčić C_i, $i = 1, 2, 3$.

Zadatak 2.4. Kutija sadrži n kuglica nepoznatih boja. Sve pretpostavke o broju bijelih kuglica su jednako vjerojatne. Ako je bez vraćanja izvučena kuglica bijele boje, kolika je vjerojatnost da će i sljedeća izvučena kuglica biti bijele boje?

Zadatak 2.5. Bacamo slučajan broj N kocaka. Neka je A_i događaj da je $N = i$ te pretpostavimo da je $\mathbb{P}(A_i) = 2^{-i}$ za sve $i \geqslant 1$. Neka je S zbroj dobivenih brojeva. Odredite vjerojatnost da je:

(i) $N = 2$ ako znamo da je $S = 4$;
(ii) $S = 4$ ako znamo da je N paran.

Zadatak 2.6. Imamo 5 novčića, od kojih dva na obje strane imaju pismo, jedan na obje strane ima glavu, a preostala dva su simetrična. Zatvorimo oči, odaberemo nasumičan novčić i bacimo ga.

(i) Koja je vjerojatnost da se na donjoj strani nalazi pismo?
(ii) Otvorimo oči i vidimo da novčić pokazuje pismo; koja je vjerojatnost da je na donjoj strani pismo?
(iii) Ponovo zatvorimo oči i bacimo novčić. Koja je vjerojatnost da je na donjoj strani pismo?
(iv) Otvorimo oči i vidimo da novčić pokazuje pismo; koja je vjerojatnost da je na donjoj strani pismo?
(v) Uklonimo ovaj novčić, nasumično odaberemo neki drugi i bacimo ga. Koja je vjerojatnost da on pokazuje pismo?

Zadatak 2.7. (i) Pretpostavimo da k ljudi nezavisno jedan od drugog biraju po jednu od n različitih vrsta sladoleda ($k \leqslant n$). Odredite vjerojatnost postoji barem jedan par ljudi koji su izabrali istu vrstu te pokažite da je ova vjerojatnost odozdo ograničena s $1 - \exp\{-\frac{(k-1)k}{2n}\}$. *Uputa:* Iskoristite nejednakost $1 - x \leqslant e^{-x}$, $x \geqslant 0$.

(ii) Kolika je vjerojatnost da u grupi od k slučajno odabranih ljudi barem dvoje imaju rođendan na isti dan u godini? Pokažite da je ta vjerojatnost barem 0.5 ako je $k = 23$, te barem 0.998 ako je $k = 70$.

Zadatak 2.8. Neka su $A, B, C \in \mathcal{F}$ nezavisni događaji. Pokažite da su tada nezavisni i događaji A i B^c, A^c i B^c, A i $B \cup C$, $A \setminus B$ i C.

Zadatak 2.9. Simetričnu kocku bacamo n puta. Neka je $A_{i,j}$ događaj da kocka pri i-tom i j-tom bacanju pokazuje isti broj. Pokažite da su događaji $(A_{i,j})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ u parovima nezavisni, ali da nisu nezavisni.

Zadatak 2.10. Novčić koji pokazuje pismo s vjerojatnošću p, a glavu s vjerojatnošću $1 - p$, bačen je n puta. Neka je E događaj da je u prvom bacanju palo pismo, a F_k događaj da je palo ukupno točno k pisama. Odredite sve trojke (n, k, p) za koje su događaji E i F_k nezavisni.

Zadatak 2.11. Dva igrača pikada, A i B, naizmjence bacaju strelice dok netko ne pogodi u centar. Poznato je da su ishodi različitih bacanja nezavisni te da pri svakom bacanju A ima vjerojatnost p_A, dok B ima vjerojatnost p_B da pogodi u centar. Ako A kreće prvi, odredite vjerojatnost da će on prvi pogoditi u centar.

Zadatak 2.12. Uzastopno bacamo novčić koji s vjerojatnošću p pokazuje pismo, a s vjerojatnošću $1 - p$ glavu. Za dane prirodne brojeve r i s, odredite vjerojatnost da se prije pojavi r uzastopnih pisama nego s uzastopnih glava.

Zadatak 2.13. Promatramo nezavisna bacanja novčića. Za $n \in \mathbb{N}$ neka događaj A_n označava da je u n-tom bacanju novčić pao na glavu.

(i) Objasnite riječima što predstavlja događaj $B = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k^c$.

(ii) Izrazite formulom sličnom onoj iz (i) dijela zadatka događaj C da je novčić beskonačno mnogo puta pao na glavu.

(iii) Koje su vjerojatnosti događaja B i C kada je $\mathbb{P}(A_n) = p$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i neki $0 < p < 1$?

Zadatak 2.14. Neka je $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ niz događaja. Događaj iz Borel-Cantellijevih lema često označavamo s

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k \,,$$

te slično

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k \,.$$

Pokažite da vrijedi

(i)

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right)$$

(ii)

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right)$$

POGLAVLJE 3

Diskretne slučajne varijable

ZADATAK 3.1. Slučajna varijabla X ima razdiobu

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ c & 2c & 2c & 3c & c^2 & 2c^2 & 7c^2 + c \end{pmatrix}.$$

(i) Odredite konstantu $c \in \mathbb{R}$.
(ii) Izračunajte $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 5)$.

ZADATAK 3.2. Slučajna varijabla X poprima vrijednosti u skupu prirodnih brojeva i vrijedi $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}$ za $k \in \mathbb{N}$. Odredite razdiobu slučajne varijable $Y = \sin\left(\frac{\pi X}{2}\right)$.

ZADATAK 3.3. Neka je X slučajna varijabla koja poprima vrijednosti u $\mathbb{N}$ s distribucijom

$$\mathbb{P}(X = k) = ck^{-\alpha}\,,\ k = 1, 2, \ldots$$

za parametre $c, \alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Odredite moguće kombinacije parametara c i α.
(ii) Odredite za koje vrijednosti parametra α je $\mathbb{E}[X] < \infty$.

ZADATAK 3.4. Bacimo n jednakih nesimetričnih novčića koji pokazuje glavu s vjerojatnošću p. Sve novčiće koji su pali na glavu bacimo još jednom. Odredite distribuciju ukupnog broja glava u drugom bacanju. Kako izgleda njena vjerojatnosna funkcija mase?

ZADATAK 3.5. Kladite se na igru u kojoj je vjerojatnost dobitka $0 < p \leqslant 1/2$. Ako dobijete u igri, dobitak je jednak iznosu uloga (ako izgubite, izgubili ste ulog). Prva oklada je 1 kn; ako dobijete, prestajete igrati. Ako izgubite, kladite se za 2 kn, itd. Vaša n-ta oklada iznosi 2^{n-1} kn. Čim dobijete u nekoj igri odmah odustajete od daljnje igre.

(i) Pokažite da je Vaš ukupni dobitak 1 kn s vjerojatnošću 1.
(ii) Nađite očekivani iznos oklade kojom dobivate.

Nadalje, pretpostavite da je najveća dopuštena oklada jednaka 2^L kn, $L \in \mathbb{N}$.

(iii) Koliki je očekivani dobitak kada prestajete s igrom?

ZADATAK 3.6. Marko svaki dan kasni na nastavu s vjerojatnošću 0.2.

(i) Kolika je vjerojatnost da je u jednom tjednu (tj. u 5 radnih dana) zakasnio najviše jednom?
(ii) Za koji najveći broj dana u tjednu možemo biti barem 90% sigurni da je barem toliko puta došao na vrijeme?

Zadatak 3.7. Simetričan novčić bacamo dok se pismo ne pojavi po drugi put. Neka X označava potreban broj bacanja (za taj događaj). Izračunajte $\mathbb{P}(X \leqslant 6)$, $\mathbb{E}[X]$ i $\mathrm{Var}(X)$.

Zadatak 3.8. Simetrična kocka ima četiri strane obojane žutom bojom te dvije obojane plavom bojom. Odredite očekivani broj bacanja kocke do pojave obje boje.

Zadatak 3.9. U neko skladište dolazi 1000 porculanskih vaza. Vjerojatnost da se neka razbije tijekom transporta je 0.002. Neovisno o tome, neke vaze razbiju se i unutar skladišta, s vjerojatnošću 0.0015 (pritom je moguće da je neka vaza razbijena i u transportu i u skladištu). Nađite vjerojatnost da je ukupan broj razbijenih vaza veći od 3.

Zadatak 3.10. U grupi od n ljudi,

(a) Koliki je očekivani broj različith dana u godini (od 365 dan) u kojima barem jedna osoba ima rođendan?
(b) Koliki je očekivani broj parova ljudi koji imaju rođendan na isti dan.

Zadatak 3.11. Ako U ima diskretnu uniformnu razdiobu na $\{1, 2, \ldots, n\}$, tj. $\mathbb{P}(U = i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, odredite $\mathbb{E}[U]$ i $\mathrm{Var}(U)$. (*Uputa:* $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.)

Zadatak 3.12. Ako su $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ proizvoljni događaji, dokažite formulu-uključivanja isključivanja koristeći indikatorske funkcije.

Zadatak 3.13. (a) Ako je X slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N}_0$. Pokažite da X ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$ (tj. $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$) akko za svaku funkciju $g : \{0, 1, \ldots\} \to [0, \infty)$ vrijedi

$$\mathbb{E}[Xg(X)] = \lambda \mathbb{E}[g(X + 1)] .$$

Napomena: Ovaj identitet je baza tzv. *Stein-Chenove* metode za dokazivanje konvergencije prema Poissonovoj razdiobi, pri čemu se usput dobiju jako precizne ograde na brzinu konvergencije. Glavna ideja metode je u tome da slučajna varijabla X *približno* ima $\mathrm{P}(\lambda)$ razdiobu ako gornji identitet *približno* vrijedi za dovoljno veliku klasu funkcija g.

(b) Koristeći (a) dio, odredite $\mathbb{E}[X^3]$ za $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$.

Zadatak 3.14. (a) Neka $T \sim \mathrm{G}_0(p)$ za $p > 0$, tj. $\mathbb{P}(T = k) = q^k p$, $k \in \mathbb{N}_0$, za $q := 1 - p$. Pokažite da T ima *svojstvo zaboravljivosti*: za svaki $m \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(T - m \geqslant k \mid T \geqslant m) = \mathbb{P}(T \geqslant k) , \quad \forall k \geqslant 0 .$$

Je li to intuitivno jasno?

(b) Pokažite da je $\mathrm{G}_0(p)$ jedina razdioba na $\mathbb{N}_0$ koja ima gornje svojstvo zaboravljivosti.

Zadatak 3.15. Bacamo simetričan novčić.

(a) Koliki je očekivani broj bacanja dok prvi put ne dobijemo uzorak PG?
(b) Koliki je očekivani broj bacanja dok prvi put ne dobijemo uzorak PP?

ZADATAK 3.16. U zdjeli se nalazi n špageta. U svakom koraku, dok god je to moguće, odaberemo nasumičan par krajeva špageta te spojimo odabrane krajeve. Ako odabrani krajevi pripadaju istom špagetu, tada spajanjem nastaje petlja. Koji je očekivani broj petlji na kraju ovog procesa?

ZADATAK 3.17. Neka je $G = (V, E)$ konačan graf. Za $W \subseteq V$ i $e \in E$ definiramo

$$I_W(e) = \begin{cases} 1\,, & \text{ako } e \text{ povezuje } W \text{ i } W^c, \\ 0\,, & \text{inače.} \end{cases}$$

Ako je $N_W = \sum_{e \in E} I_W(e)$ ukupan broj bridova koji povezuju W i W^c, pokažite da nužno postoji $W \subseteq V$ takav da je $N_W \geqslant |E|/2$.

Uputa: Slučajno obojajte vrhove u dvije boje te gledaje podskup vrhova iste boje. Iskoristite činjenicu da za slučajnu varijablu X, $\mathbb{E}[X] \geqslant c$ povlači da je nužno $\mathbb{P}(X \geqslant c) > 0$.

ZADATAK 3.18. U kutiji imamo m_1 bijelih i m_2 crvenih kuglica. Slučajno odaberemo $n \leqslant m_1 + m_2 =: N$ kuglica te s X označimo ukupan broj izvučenih bijelih kuglica; X dakle ima hipergeometrijsku razdiobu.

(a) Pokažite da je

$$\mathbb{E}\left[\binom{X}{2}\right] = \binom{m_1}{2} \frac{n}{N} \frac{n-1}{N-1}\,.$$

Uputa: Koristite indikatore.

(b) Koristeći (a) dio pokažite (mukotrpnim računom) da je

$$\mathrm{Var}(X) = npq \cdot \frac{N-n}{N-1}\,,$$

gdje je $p := \frac{m_1}{m_1+m_2}, q := 1 - p$. Kakva je dakle varijanca u odnosu na $\mathrm{B}(n, p)$ razdiobu?

ZADATAK 3.19. Neka je π uniformno slučajno odabrana permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$. U ovisnosti o n odredite očekivani broj ciklusa u π.

POGLAVLJE 4

Diskretni slučajni vektori

ZADATAK 4.1. U kutiji se nalazi pet kuglica označenih brojevima od 1 do 5. Na slučajan način izvlačimo dvije različite kuglice i vraćamo ih natrag u kutiju. Pokus ponavljamo ukupno dva puta. S X označimo broj izvučenih kuglica s brojem 1, a s Y broj izvučenih kuglica s brojem 2.

(a) Odredite razdiobu slučajnog vektora (X, Y), te marginalne gustoće.

(b) Odredite $\mathbb{P}(X + Y \leqslant 2)$.

ZADATAK 4.2. Imamo pokus koji ima ukupno k mogućih različitih ishoda, pri čemu je vjerojatnost svakog ishoda $p_i \in [0, 1]$, $i = 1, ..., k$ ($\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$). Ako s X_i označimo broj pojavljivanja ishoda i u n nezavisnih ponavljanja pokusa, slučajni vektor $(X_1, ..., X_k)$ ima tzv. **polinomijalnu distribuciju** s parametrima $(n, p_1, ..., p_k)$, te predstavlja generalizaciju binomne razdiobe.

(a) Odredite diskretnu funkciju gustoće (tj. distribuciju) vektora $(X_1, ..., X_k)$.

(b) Odredite marginalne razdiobe. *Uputa:* Za ovo vam ne treba (a) dio.

(c) Jesu li $X_1, \ldots, X_k$ u parovima nezavisne?

(d) Odredite razdiobu slučajne varijable $X_i + X_j$ za $i \neq j$.

(e) Odredite razdiobu $(k - 1)$-dimenzionalnog slučajnog vektora $(X_1 + X_2, X_3, \ldots, X_k)$.

ZADATAK 4.3. Ako su $X \sim G(p_1)$ i $Y \sim G(p_2)$ nezavisne, odredite $\mathbb{P}(X > Y)$ i $\mathbb{P}(X = Y)$.

ZADATAK 4.4. Neka su $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ proizvoljni događaji. Pokažite da su oni nezavisni akko su indikatori $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ nezavisne slučajne varijable. *Uputa:* Koristite tvrdnju da nezavisnost događaja $A_1, \ldots, A_n$ povlači nezavisnost događaja $B_1, \ldots, B_n$ pri čemu je $B_i = A_i$ ili A_i^c, za sve i.

ZADATAK 4.5. Bacamo dvije simetrične kocke. Označimo s X broj šestica, a s Y broj jedinica koje su pale.

(a) Odredite razdiobu slučajnog vektora (X, Y) i marginalne razdiobe slučajnih varijabli X i Y. Jesu li X i Y nezavisne?

(b) Odredite $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Je li rezultat očekivan?

ZADATAK 4.6. Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i jednako distribuirane diskretne slučajne varijable s očekivanjem $\mathbb{E}[X_i] = \mu \in \mathbb{R}$ te $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$.

(a) Odredite $\mathbb{E}[\overline{X}_n]$ i $\mathrm{Var}(\overline{X}_n)$, za $\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(b) Odredite $\mathbb{E}[S_n]$ za $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$. Imate li ideju za alternativni procjenitelj varijance σ^2?

ZADATAK 4.7. Neka su X, Y, Z, W diskretne slučajne varijable definirane na istom vjerojatnosnom prostoru te takve da sve imaju konačan drugi moment. Pokažite da vrijedi

(a) $\mathrm{Cov}(X, Y+Z) = \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(X,Z)$

(b) $\mathrm{Cov}(X+Y, Z+W) = \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(X,W) + \mathrm{Cov}(Y,Z) + \mathrm{Cov}(Y,W)$.

ZADATAK 4.8. Bacamo simetričnu kocku. Neka je X broj bacanja do pojave prve šestice, a Y broj bacanja do pojave treće šestice.

(a) Odredite funkciju gustoće slučajnog vektora (X,Y).

(b) Odredite $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

ZADATAK 4.9. Ako su X i Y slučajne varijable definirane na istom vjerojatnosnom prostoru i $m \in \mathbb{N}$, te vrijedi $\mathbb{E}[|X|^m], \mathbb{E}[|Y|^m] < \infty$, tada vrijedi i $\mathbb{E}[|X+Y|^m] < \infty$; na primjer, ako je $\mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y) < \infty$, nužno je i $\mathrm{Var}(X+Y) < \infty$.

ZADATAK 4.10. Neka $(X_1, ..., X_k)$ ima polinomijalnu distribuciju s parametrima $(n, p_1, ..., p_k)$.

(a) Za $i \neq j$, odredite $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ te $\rho(X_i, X_j)$. Je li rezultat intuitivno jasan? *Uputa:* Koristite indikatore.

(b) Možete li riješiti Zadatak 4.5(b) koristeći gornji (a) dio? Što kada bismo u Zadatku 4.5 umjesto broja šestica i jedinica gledali npr. broj parnih i prostih brojeva?

ZADATAK 4.11. Neka je X broj dana u godini u kojima barem jedna osoba u grupi od 110 ljudi ima rođendan; pretpostavka je da imamo 365 dana u godini, te da svaka osoba nezavisno od ostalih može imati rođendan na bilo koji dan u godini s jednakom vjerojatnosti. Odredite $\mathrm{Var}(X)$. *Uputa:* Koristite indikatore.

ZADATAK 4.12. Neka su X i Y nezavisne Poissonove slučajne varijable s parametrima λ i μ redom.

(i) Odredite distribuciju slučajne varijable $X+Y$.

(ii) Dokažite da je distribucija slučajne varijable X, uvjetno na događaj $X+Y=n$, binomna s parametrima n i $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

ZADATAK 4.13. Pretpostavimo da imamo $N \sim \mathrm{P}(\lambda)$ kuglica, te da svaku kuglicu, nezavisno od drugih, obojamo u plavo s vjerojatnošću p ili u crveno s vjerojatnošću $q := 1-p$ ($p \in (0,1)$). Neka je N_P ukupan broj plavih, a N_C ukupan broj crvenih kuglica. Odredite zajedničku razdiobu od N_P i N_C. Zaključite da je $N_P \sim \mathrm{P}(\lambda p)$, $N_C \sim \mathrm{P}(\lambda q)$, te da su one nezavisne (iako je $N_P + N_C = N$). *Uputa:* Prikažite N_P i N_C kao sume N nezavisnih indikatora, te iskoristite da je $\mathbb{P}(N_P = k, N_C = m) = \mathbb{P}(N_P = k, N = m+k)$.

ZADATAK 4.14. Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i jednako distribuirane diskretne slučajne varijable za koje postoji očekivanje, te neka je $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Pokažite da je $\mathbb{E}[X_i \mid S_n] = \frac{S_n}{n}$, za sve $i = 1, \ldots, n$. *Uputa:* Što možete reći o $\mathbb{E}[X_i \mid S_n = s]$ i $\mathbb{E}[X_j \mid S_n = s]$?

ZADATAK 4.15. Bacamo simetričnu kocku. Neka X i Y označavaju broj bacanja potreban da se po prvi put dobije šestica, odnosno petica. Izračunajte $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X|Y=1]$ i $\mathbb{E}[X|Y=5]$. *Uputa:*

Odredite $\mathbb{E}[X \mid Y = n]$ za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ (time ćete efektivno odrediti $\mathbb{E}[X \mid Y]$) koristeći činjenicu da ako je Z slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N}$, tada $\mathbb{E}[Z] = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant m)$ (ovdje to primjenjujemo za uvjetnu vjerojatnost $\mathbb{P}(\cdot \mid Y = n)$ umjesto $\mathbb{P}$).

Zadatak 4.16. n ljudi različitih visina na slučajan način stane u red. Za $i = 1, \ldots, n$, neka je X_i broj ljudi prije i-te osobe u redu koji su viši od nje.

(i) Pokažite da diskretni slučajni vektor $(X_1, \ldots, X_n)$ ima uniformnu distribuciju na skupu $\prod_{i=1}^{n} \{0, 1, \ldots, i-1\}$.

(ii) Odredite distribucije slučajnih varijabli $X_1, \ldots, X_n$ te pokažite da su one nezavisne.

(iii) Kažemo da je osoba *rekordno visoka* ako je viša od svih ljudi koji se nalaze prije nje u redu. Neka je A_i događaj da je i-ta osoba u redu rekordno visoka. Pokažite da su događaji $A_1, \ldots, A_n$ nezavisni. Koji je očekivani broj rekordno visokih osoba?

(iv) *Inverzija* je par osoba takvih da se ona koja je viša nalazi prije u redu. Odredite očekivanje i varijancu broja inverzija.

POGLAVLJE 5

Neprekidne slučajne varijable

Zadatak 5.1. Neka je X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2), & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite vrijednost konstante c i izračunajte $\mathbb{P}(X > 1)$.

Zadatak 5.2. Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom distribucije

$$F(x) = C - e^{-x^2}, \quad \text{za sve } x > 0.$$

Odredite vrijednost konstante C i izračunajte $\mathbb{P}(X > 2)$ i $\mathbb{P}(1 < X < 3)$. Odredite funkciju gustoće f.

Zadatak 5.3. Ako je $U \sim \mathrm{Unif}(0,1)$, pronađite funkciju $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ takvu da slučajna varijabla $Y := f(U)$ ima razdiobu iz Zadatka 5.2.

Zadatak 5.4. Ako je $U \sim \mathrm{Unif}(a,b)$, a $(c,d) \subseteq (a,b)$, odredite razdiobu slučajne varijable U uvjetno na događaj $\{U \in (c,d)\}$.

Zadatak 5.5. (a) Ako su F_1, F_2 dvije funkcije distribucije te $p \in [0,1]$ proizvoljan. Pokažite da je tada funkcija F zadana s $F(x) := pF_1(x) + (1-p)F_2(x)$ također funkcija distribucije neke slučajne varijable. Ako znamo generirati slučajne varijable s funkcijom distribucije F_1, odnosno F_2, kako biste generirali slučajnu varijablu s funkcijom distribucije F?

(b) Bacamo nesimetričan novčić na kojemu je vjerojatnost da padne pismo jednaka $1/3$. Generiramo slučajnu varijablu X na sljedeći način: ako je novčić pokazao pismo, stavimo $X := 0$, a ako je pala glava generiramo $E \sim \mathrm{Exp}(2)$ slučajnu varijablu te stavimo $X := E$. Odredite funkciju distribucije od X. Je li X neprekidna slučajna varijabla? Je li diskretna?

Zadatak 5.6. (a) Neka je R radijus slučajno odabrane točke iz jediničnog kruga. Odredite gustoću slučajne varijable R, te njeno očekivanje i varijancu. Ima li R uniformnu razdiobu na $(0,1)$?

(b) Neka je $R \sim \mathrm{Exp}(1)$, te A površina kruga s radijusom R. Odredite funkciju distribucije, gustoću, te očekivanje slučajne varijable A. *Uputa: Korisno je koristiti formulu* $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\mathrm{d}t$ *koja zapravo vrijedi za proizvoljnu nenegativnu slučajnu varijablu* X.

Zadatak 5.7. Neka je $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ i $Y := |X|$ tzv. preklopljena (engl. *folded*) normalna slučajna varijabla.

(a) Odredite funkciju distribucije od Y, te ju izrazite u terminima funkcije distribucije Φ standardne normalne razdiobe. Ako je $\mu = -1$, $\sigma = 2$, te znate da je $\Phi(1) \approx 0.84$, $\Phi(2) \approx 0.98$, odredite $\mathbb{P}(Y < 3)$.

(b) Slučajna varijabla Y je neprekidna (to slijedi npr. jer joj je funkcija distribucije neprekidna, te diferencijabilna osim u konačno mnogo točaka) – odredite joj funkciju gustoće. Skicirajte gustoću ako je $\mu = \sigma = 1$; odavde dolazi ime ”preklopljena”.

(c) Pokažite da je

$$\mathbb{E}[Y] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} + \mu\left[1 - 2\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)\right],$$

te da je

$$\mathrm{Var}(Y) = \mu^2 + \sigma^2 - \mathbb{E}[Y]^2 .$$

Zadatak 5.8. Vijek trajanja neke automobilske gume je normalno distribuiran s očekivanjem 34000 km i standardnom devijacijom od 4000 km.

(a) Izračunajte vjerojatnost da guma traje više od 40000 km.

(b) Ako je guma prešla 30000 km, izračunajte vjerojatnost da će trajati još 10000 km.

Zadatak 5.9. Pretpostavimo da je vrijeme putovanja nekog studenta od kuće do fakulteta približno normalno distribuirano s očekivanjem 40 minuta i standardnom devijacijom od 7 minuta. Student želi stići na predavanje koje počinje u 12:15 sati. Kada bi student najkasnije trebao krenuti od kuće da s vjerojatnošću barem 95% ne zakasni na predavanje?

Zadatak 5.10. Odredite $\mathrm{Var}(X)$ ako je

(a) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$;

(b) $\mathbb{P}(X > x) = x^{-\alpha}$, za $x \geqslant 1$, te $\mathbb{P}(X > x) = 1$ za $x < 1$, pri čemu je $\alpha > 1$; kažemo da X ima Paretovu razdiobu s parametrom α. Inače se dopušta da je $\alpha > 0$ – zašto je ovdje potrebno da je $\alpha > 1$?

Zadatak 5.11. (a) Neka su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable s funkcijom distribucije F i funkcijom gustoće f.[1] Odredite funkciju distribucije i funkciju gustoće slučajnih varijabli $L_n := \min(X_1, \dots, X_n)$ i $M_n := \max(X_1, \dots, X_n)$ u terminima F i f.

(b) Ako su $X_1, \dots, X_n$ n.j.d. s $\mathrm{Exp}(\lambda)$ razdiobom, pokažite da L_n također ima eksponencijalnu razdiobu te joj odredite parametar. Koliko je $\mathbb{E}[L_n]$ i $\mathrm{Var}(L_n)$? *Napomena:* Što ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne eksponencijalne, ali s različitim parametrima $\lambda_1, \dots, \lambda_n$?

(c) Ako su $X_1, \dots, X_n$ n.j.d. s $\mathrm{Exp}(\lambda)$ razdiobom, pokažite da je

$$\mathbb{E}[M_n] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\lambda} .$$

Možete li intuitivno objasniti rezultat s obzirom na rezultat iz (b) dijela i svojstvo zaboravljivosti eksponencijalne razdiobe?

[1] Smijete pretpostaviti da je f neprekidna osim u najviše konačno mnogo točaka te da je omeđena.

Uputa: Pokažite da je $\mathbb{E}[M_k] - \mathbb{E}[M_{k-1}] = \frac{1}{k\lambda}$, za $k \geqslant 1$, tako što ćete koristeći formulu $\mathbb{E}[M_k] = \int_0^\infty \mathbb{P}(M_k > t)\mathrm{d}t$ te u dobivenom izrazu prepoznati gustoću od M_k.

Zadatak 5.12. Neka su $X_1, \ldots, X_{2n+1}$ nezavisne slučajne varijable s distribucijom $U(0,1)$. Pronađite funkciju gustoće njihovog medijana.

Napomena: Medijan brojeva $x_1, \ldots, x_{2n+1} \in \mathbb{R}$ je broj m koji je jednak nekom x_i za koji postoji n indeksa j takvih da je $x_j \leqslant m$ i n indeksa k takvih da je $x_k \geqslant m$. Na primjer, ako je $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n+1}$, tada je medijan $m = x_{n+1}$.

POGLAVLJE 6

Funkcije izvodnice

Zadatak 6.1. Bacimo 6 simetričnih kocki, te s X označimo njihovu sumu. Odredite $\mathbb{P}(X = 18)$.
Uputa: Odredite funkciju izvodnicu vjerojatnosti $G_X(t)$ od X, razvijte je u red potencija (oko 0), te pronađite koeficijent koji stoji uz t^{18}.

Zadatak 6.2. Uzastopno bacamo simetričnu kocku sve dok prvi put ne dobijemo dvije šestice zaredom – označimo s X potreban broj bacanja.

(a) Ako je $p_n := \mathbb{P}(X = n)$ za $n \geqslant 1$, pokažite da vrijedi

$$p_n = \frac{5}{6}p_{n-1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}p_{n-2}\,, \quad n \geqslant 3\,.$$

(b) Koristeći (a) dio, odredite funkciju izvodnicu vjerojatnosti od X te odredite $\mathbb{E}[X]$ i $\mathrm{Var}(X)$.

Zadatak 6.3. Luigijev restoran dostavlja pizze. Broj ljudi koji u jednom danu naruče pizzu ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$, a Luigi njihove podatke točno zapisuje s vjerojatnošću $p \in (0, 1)$. Odredite distribuciju uspješno dostavljenih pizza u jednom danu, te vjerojatnost da Luigi uspješno dostavi bar jednu pizzu.

Zadatak 6.4. (a) Ako je N slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N}_0$, a $X_1, X_2, \ldots$ niz n.j.d. slučajnih varijabli u $\mathbb{N}_0$ nezavisan od N, te $S_N := \sum_{i=1}^{N} X_i$, pokažite da vrijedi

$$\mathrm{Var}(S_N) = \mathbb{E}[N]\mathrm{Var}(X_1) + \mathbb{E}[X_1]^2\mathrm{Var}(N)\,,$$

ukoliko je $\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1] < \infty$. Uvjerite se da ovaj rezultat daje već poznate rezultate u specijalnim slučajevima kada su slučajne varijable N ili X_i gotovo sigurno konstantne.

(b) Paralelno bacamo dvije simetrične kocke dok na prvoj ne padne šestica. Odredite očekivanje i varijancu zbroja brojeva koji su pali na drugoj kocki.

Zadatak 6.5. Neka slučajna varijabla X ima funkciju izvodnicu momenata M_X na $(-t_0, t_0)$. Pokažite da za sve $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt}M(at)\,, \quad |t| \cdot |a| < t_0\,.$$

Zadatak 6.6. Neka je X slučajna varijabla. Odredite funkciju izvodnicu momenata $M_X(t)$ ako je

(a) $X \sim \mathrm{Unif}(a, b)$;

(b) $X \sim \mathrm{B}(n, p)$.

ZADATAK 6.7. Odredite funkciju izvodnicu momenata $M_X(t)$ ako je $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, za $\alpha, \lambda > 0$. Zaključite da za $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ i $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$ vrijedi $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$; ovaj rezultat i intuitivno ima smisla imajući u vidu da za $k \in \mathbb{N}$, suma k nezavisnih $\mathrm{Exp}(\lambda)$ slučajnih varijabli ima točno $\Gamma(k, \lambda)$ razdiobu. *Napomena:* Gustoća $\Gamma(\alpha, \lambda)$ razdiobe je

$$f_{\Gamma(\alpha,\lambda)}(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}\,, \quad t \geqslant 0\,.$$

ZADATAK 6.8. Ako je $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$, odredite $\mathbb{E}[Z^n]$, za sve $n \geqslant 1$. *Uputa:* Razvijte $M_Z(t)$ u red potencija oko 0.

ZADATAK 6.9. Slučajna varijabla X ima log-normalnu razdiobu s parametrima μ, σ^2 ako je $\log(X) \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Odredite $\mathbb{E}[X]$ i $\mathrm{Var}(X)$. *Uputa:* Koristite funkciju izvodnicu momenata normalne slučajne varijable.

ZADATAK 6.10. Ako su $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, n$, nezavisne te

$$\widehat{\mu}_n := \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} X_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

procjenitelj za μ, odredite $\mathbb{E}\Big[|\widehat{\mu}_n - \mu|\Big]$; razmislite što se događa s $\widehat{\mu}_n$ ako $\sigma_i \to 0$ ili $\sigma_i \to +\infty$ za neki i. *Uputa:* Iz Zadatka 5.7 znamo da za $Z \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ vrijedi $\mathbb{E}\Big[|Z|\Big] = \sigma\sqrt{2/\pi}$.

POGLAVLJE 7

Nejednakosti i granični teoremi

ZADATAK 7.1. (a) Neka je X proizvoljna slučajna varijabla. Pokažite da za sve $a \in \mathbb{R}$ i $t > 0$ vrijedi *Chernoffova* ograda:

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}}.$$

(b) Neka je $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$; odredite ograde na vjerojatnost $\mathbb{P}(|Z| \geqslant 3)$ koje daju Markovljeva, Čebiševljeva i Chernoffova nejednakost (uz optimalni t), te ih usporedite sa stvarnom vrijednosti te vjerojatnosti.

(c) Provedite postupak iz dijela (b) za vjerojatnost $\mathbb{P}(X \geqslant 75)$, gdje je $X \sim \mathrm{B}(100, \frac{1}{2})$.

ZADATAK 7.2. Ako je $X_1, X_2, \dots$ niz n.j.d. slučajnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem $\mu := \mathbb{E}[X_1]$ i varijancom $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_1) < \infty$, koristeći Čebiševljevu nejednakost odredite vrijednost $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je sigurno $\mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| < 2\sigma) \geqslant 0.99$ za sve $n \geqslant n_0$.

ZADATAK 7.3. Neka je $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ograničena neprekidna funkcija. Nađite niz slučajnih varijabli $X_1, X_2, \dots$ za koje vrijedi

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\text{g.s.}} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\,, \quad \text{kada } n \to \infty\,.$$

Napomena: Gornje je glavna ideja tzv. *Monte Carlo integracije.*

ZADATAK 7.4. Ako su $X_1, X_2, \dots$ n.j.d. slučajne varijable i $B \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan, odredite (ako postoji g.s.) limes niza $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \in B\}}$, $n \in \mathbb{N}$.

ZADATAK 7.5. Neka su $X_1, X_2, \dots$ n.j.d. slučajne varijable s distribucijom $X_i \sim \mathrm{Unif}(-1,1)$, te neka je $X^{(n)} := (X_1, \dots, X_n) \in [-1,1]^n$, $n \geqslant 1$. Ako je $|x| := (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ euklidska norma točke $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, odredite (ako postoji g.s.) limes niza $\frac{|X^{(n)}|}{\sqrt{n}}$, $n \geqslant 1$. *Napomena:* Može se pokazati da slučajni vektor $X^{(n)}$ ima tzv. uniformnu razdiobu na hiperkocki $[-1,1]^n$, tj. vrijedi $\mathbb{P}(X^{(n)} \in A) = \lambda(A)/2^n$, za $A \subseteq \mathbb{R}^n$, gdje je $\lambda(A)$ "volumen" skupa A (dakle, $\lambda([-1,1]^n) = 2^n$).

ZADATAK 7.6. Prosjak dobije novčić od prolaznika s vjerojatnošću 0.05. Koliko prolaznika treba proći ulicom da bi prosjak skupio barem 150 novčića s vjerojatnošću od barem 0.95?

ZADATAK 7.7. Na ispitu je 40 zadataka i za svaki su ponuđena četiri odgovora, od kojih je samo jedan točan. Za točno zaokružen odgovor dobije se 15 bodova, a za pogrešno zaokružen gubi se 5 bodova. Kolika je vjerojatnost da student koji slučajnim odabirom bira odgovore ostvari barem 120 bodova?

Zadatak 7.8. Svaki dan, vrijednost dionice raste 70% ili pada 50%, i to s jednakim vjerojatnostima te neovisno o prethodnim danima. Neka je Y_n cijena dionice nakon n dana, pri čemu je $Y_0 := 100$.

(a) Pokažite da za $a_n := \mathbb{E}[\log(Y_n)]$ i $b_n^2 := \mathrm{Var}(\log(Y_n))$, $n \geqslant 1$, vrijedi da $\log(Y_n)$ za velike n približno ima $\mathrm{N}(a_n, b_n^2)$ razdiobu, tj. da

$$\frac{\log(Y_n) - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} Z \sim \mathrm{N}(0,1)\,.$$

Odredite a_n i b_n.

(b) Odredite $\mathbb{E}[Y_n]$ za sve $n \geqslant 1$ te odredite $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n]$.

(c) Pokažite da $Y_n \xrightarrow{\text{g.s.}} 0$ kada $n \to \infty$. *Uputa:* Napišite Y_n kao funkciju od U_n/n gdje je $U_n \sim \mathrm{B}(n, \frac{1}{2})$.

Zadatak 7.9. (a) Ako je X_n ima Poissonovu razdiobu s parametrom n, za $n \geqslant 1$, pokažite da X_n za velike n približno ima normalnu razdiobu te joj odredite parametre.

(b) Odredite

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\,.$$

Zadatak 7.10. (a) (**Slutskyjev teorem**) Pretpostavimo da su slučajne varijable $X, X_1, X_2, \ldots$ i $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ definirane na istom vjerojatnosnom prostoru, te da vrijedi $X_n \xrightarrow{d} X$ i $Y_n \xrightarrow{d} Y$, kada $n \to \infty$. Ako je $Y = c \in \mathbb{R}$ konstantna, pokažite da onda $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$, kada $n \to \infty$.

(b) Pokažite da ako Y nije konstantna slučajna varijabla, tvrdnja iz (a) dijela ne mora vrijediti.

Zadatak 7.11. Neka je $X, X_1, X_2, \ldots$ niz slučajnih varijabli definiran na istom vjerojatnosnom prostoru takav da za neki $p \geqslant 1$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[|X_n - X|^p\Big] = 0$ (kažemo da niz $(X_n)_{n\geqslant 1}$ L_p-konvergira prema X). Pokažite da tada $(X_n)_{n\geqslant 1}$ konvergira i po vjerojatnosti prema X.